جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب :
كلية العلوم	الفصل الثاني للعام 2016/ 2017	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول (35 درجة) 1) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز على $[a,b]$، فأثبت أنها تكون مستمرة مطلقاً عليها، و هل هي قابلة للاشتقاق تقريباً في كل مكان على $[a,b]$؟ و لماذا؟

2) اعتماداً على صيغتي تكامل ستيلتجس الأعلى و الأدنى لدالة f بالنسبة لـ g متزايدة على $[a,b]$، علل إن كانت دالة ديريخليه كمولة بالنسبة للدالة $g(x)=7x+1$ على الفترة $[1,\sqrt{5}]$، و ما هو التغير الكلي لدالة ديريخليه عليها عندئذ.

3) إذا كانت f دالة قيوسة على $[a,b]$ فأثبت أن مربعها دالة قيوسة عليها حسب التعريف، ثم أوجد دالة التغير للدالة: $\varphi(x)=\arctan x$ على الفترة $[0,1]$ و احسب التغير الكلي لـ φ على الفترة $[0,\infty[$ و ارسم خطها البياني عليها.

السؤال الثاني (35 درجة) 1) اكتب الدالة الآتية:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & ; 0\le x<2 \\ 6 & ; x=2 \\ x+5 & ; 2<x\le 3 \end{cases}$$

على شكل فرق لدالتين متزايدتين و محدودتين على الفترة $[0,3]$، ثم احسب تكامل ستيلتجس: $J=\int x\,dg(x)$ بعد التأكد من وجوده، حيث g هي الدالة المعروضة السابقة.

2) بين فيما إذا كانت الدالة:

$$\sigma(x)=\begin{cases} x^2\sin^2\frac{1}{x} & ; x\in\,]0,1] \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

مستمرة مطلقاً على $[0,1]$؟ مع التوضيح و هل σ ... و كمولة لوبيغياً على نفس الفترة و لماذا؟

3) إذا كانت E مجموعة معدودة على الأكثر فوضح أنها بوريلية و لوبيغية ثم بين أن: $\lambda(E)=0$ و ما هو قياس كل من المجموعات: N & $R-Q$ حسب لوبيغ.

السؤال الثالث (30 درجة) 1) اكتب تعريف قياس لوبيغ في R، ثم أثبت أنه تام و σ-منتهية و لكنه غير منتهية، مع ذكر صفوف بوريل العبر $B(\overline{R})$.

2) تأكد من وجود تكامل لوبيغ الآتي: $I=\int_E \sin^2 x\,dx$، و من ثم احسبه في حال وجوده، $E=[0,\frac{\pi}{4}]$. ثم اكتب مثالاً على صف مطرد على $X\neq\phi$ لا يكون جبراً تاماً مع كتابة شروط الجبر التام عليها.

3) أثبت أن المتتالية: $f_n(x)=(1-x)^n; n\ge 1$ متقاربة تقريباً في كل مكان من دالة يطلب تعيينها على $[0,1]$، و هل يمكن لهذه المتتالية أن تكون متقاربة بانتظام عليها؟ و لماذا؟

----------انتهت الأسئلة----------

حمص في 11/ 7/ 2017

مدرس المقرر: د. محمد عامر

مع تمنياتي بالتوفيق

جامعة البعث — نموذج مقرر الحدود الحقيقي — الدرجة: 100

كلية العلوم — الفصل الثاني للعام $\frac{2016}{2017}$

قسم الرياضيات — سنة ثالثة - رياضيات

---

1) (35°) 1) إذا كان التابع f يحقق شرط ليبشيتز على $[a,b]$ أي:

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad ; \quad x,y \in [a,b] \ , \ L>0 \ (\in \mathbb{R})$$

ولنثبت أنه مستمر مطلقاً: أي أنه مهما كان $\varepsilon>0$ نختار $\delta>0$ بحيث $\delta<\frac{\varepsilon}{L}$ عندئذ مهما كانت أسرة $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ منتهية من المجالات الجزئية المنفصلة مثنى مثنى و $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ يكون:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| \leq L\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\varepsilon$$

وكل دالة مستمرة مطلقاً هي قابلة للاشتقاق في $[a,b]$ وبالتالي هي قابلة للاشتقاق تقريباً في كل مكان في $[a,b]$.

(12)

2) حسب تعاريف تكاملي ريمان-ستيلتجس الأعلى والأدنى لـ f بالنسبة لـ g في $[a,b]$: $\int_1^{\sqrt{5}} \varphi\, dg$

$$J_U = \inf_{P\in \mathbb{P}[a,b]} U(f,g;P) \ , \quad J_L = \sup_{P\in \mathbb{P}[a,b]} L(f,g;P)$$

و P تجزئة لـ $[a,b]$ من مجموعة التجزئات، و U, L المجموعان الأعلى والأدنى على الترتيب حيث

$$U(f,g;P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(\varphi)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=7\sqrt{5}-7 \quad ; M_k(\varphi)=1$$

$$L(f,g;P) = 0 \quad ; m_k(\varphi)=0$$

ومن أجل كل تجزئة ... [illegible]

$$J_U=\inf_{P\in \mathbb{P}[1,\sqrt{5}]}\{7\sqrt{5}-7\} = 7\sqrt{5}-7 \ , \quad J_L=\sup_{P\in \mathbb{P}[1,\sqrt{5}]}\{0\}$$

ومنه نستنتج أن φ غير قابلة للمكاملة بالنسبة لـ g لأن: $J_U \neq J_L$

*) التغير الكلي لـ φ:

$$\bigvee_1^{\sqrt{5}}(\varphi)=\infty$$

(13)

3) ولنثبت أن f^2 قيوس على $[a,b]$ لأن f قيوس بالفرضية.

$$E(f^2>c)=\begin{cases} E & ; \ c<0 \\ E(|f|>\sqrt{c}) & ; \ c\geq 0 \end{cases}$$

وكلتا المجموعتين قيوسيتان وبالتالي f^2 قيوس على (a,b).

يتبع ←

12

بما أن دالة الشرط الدالة φ تزايدية على $[0,1]$ ولذلك فهي ذات تغاير محدود وبالتالي تكون ذات تغاير محدود على $[0,x]$ حيث $0 < x \leq 1$ ومن أجل أي تجزئة P للفترة $[0,x]$ يكون لدينا

$$V(\varphi;P) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = \varphi(x) - \varphi(0) = \arctan x$$

ولذا يكون

$$V_{\varphi}(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}} = \sup_{P} |\arctan x| = \arctan x \quad \ldots (1)$$

إذاً دالة التغاير هي (1) السابقة لكل x من $[0,1]$ أي

$$V_{\varphi}(x) = \begin{cases} \overset{x}{\underset{0}{V}}(\varphi) & ; 0 < x \leq b \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الشكل البياني لـ φ على $[0,\infty[$ هو

$$\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(\varphi) = \arctan \infty - 0 = \frac{\pi}{2}$$

س2 (35°) (1) لتكن الدالة g ذات تغاير محدود

$$g_1 = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x < 2 \\ 6 & ; x = 2 \\ x+7 & ; 2 < x \leq 3 \end{cases} , \quad g_2 = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & ; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

فقط استبدال، التأكد من وجود التكامل:

الدالة $f(x) = 2^x$ مستمرة على $[0,3]$، و g ذات تغاير محدود على $[0,3]$ لأنه يمكن كتابة على الشكل: $g = g_1 - g_2$، وحسب دليل الطريقة الرابعة لأن g قابلة للاشتقاق ونقاط انقطاع من النوع الأول ($x = 2$):

$$J = \int_0^3 f\, g'\, dx + f(2)\,[g(2+0) - g(2-0)] \quad ; \quad g'(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$= 2\int_0^2 2^x \cdot x\, dx + \int_2^3 2^x\, dx + 4[7-4]$$

$x = 2$ نقطة انقطاع من النوع الأول:

كافٍ للوجود النتيجة.

5

(2) الدالة α غير قابلة للاشتقاق ومحدودة ولذلك هي مستمرة مطلقاً حسب نتيجة على $[0,1]$، وبالتالي لـ $\sqrt{\alpha}$ نفس الصيغة:

$$\sqrt{\alpha(x)} = \begin{cases} x \cos\frac{1}{x} & ; x \in]0,1] \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

والشرط ليست ذات تغاير محدود على $[0,1]$، ولكن مستمرة تماماً كذلك وبالتالي دالة كوشي غير قابلة للتكامل.

يتبع ←

(3)

3) لكون E معدودة ولا نهائية [illegible] ، ولنثبت أن $\lambda(E)=0$

لنضع: $E=\{a_1, a_2, \dots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{a_k\}$

باستعمال لوبيغ:

$\lambda^*(E) = \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{a_k\}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^*(\{a_k\}) = 0$

ومنه، $\lambda^*(E)=0$ ، وحسب مبرهنة $E \in \mathcal{L}$ إذن: $\lambda(E)=0$.

مثال: $\lambda(N)=0$ ، $\lambda(R-Q)=\infty$ لأن $\lambda(Q)=0$ معدودة ولا نهائية.

س3 (30°) : ① قياس لوبيغ: [illegible] λ المعرّف على الجبر $\mathcal{L}$ [illegible] في R ...

مجموعة $E \subset \mathcal{L}$ [illegible] لوبيغ وقياسها $\lambda(E)$.

إثبات إنه تام ، [illegible] ، ولكنه ليس منتهياً لأن: $\lambda(R)=\infty$

ذكر [illegible] $B(\bar{R})$ وهي ، $\{[a,\infty]\}, \{[-\infty,b]\}$

② وجود تكامل لوبيغ: الدالة المتكاملة مستمرة [illegible] على $[0,\frac{\pi}{4}]$ ومحدودة عليها والمجموعة E قياسية

$\lambda(E)=\frac{\pi}{4}<\infty$ محدودة ، لذا [illegible] E ، وكون الدالة المتكاملة مستمرة على E فهي قابلة للمكاملة ريمانياً

ومنه فهي قابلة للمكاملة لوبيغياً بالشكل:

$I=(L)\int_E \cos^2 x \, d\lambda = (R)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

[illegible] : $M=\{\phi, E, X\}$ ، $X \neq \phi$ [illegible]

مثال: $X=\{1,2,3\}$ ، $E=\{2\}$ [illegible]

ذكر شروط الجبر σ : حيث ϕ, X ، حيث$_2$: [illegible] ، حيث [illegible]

③ [illegible] : $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1-x)^n = \begin{cases} 1 & ; 0<x<1 \\ 0 & ; x=1 \end{cases}$ [illegible]

الدالة $f(x)=1$ [illegible] $E'=\{1\}$ [illegible]

- [illegible] $[0,1)$.

أستاذ المقرر

د. محمد [illegible]

[illegible]

[illegible] / /